Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

EXERCICE 2 [Corrigé]

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

EXERCICE 3 [Corrigé]

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$

EXERCICE 4 [Corrigé]

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$

EXERCICE 5 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ puis $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

EXERCICE 6 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

(Ecrire D comme le carré d'un autre déterminant)

EXERCICE 7 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \end{vmatrix}$

(Ecrire D comme le produit de deux déterminants)

EXERCICE 8 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & w & -v \\ -y & -w & 0 & u \\ -z & v & -u & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 9 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$

Exercice 10 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 11 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$

Exercice 12 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$

(Si $D = \det A$, considérer le produit $A^T A$)

Exercice 13 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ *(Indication : Van Der Monde)*

Exercice 14 [Corrigé]

Calculer $D = \begin{vmatrix} \|a\|^2 & a\cdot b & a\cdot c & a\cdot d \\ b\cdot a & \|b\|^2 & b\cdot c & b\cdot d \\ c\cdot a & c\cdot b & \|c\|^2 & c\cdot d \\ d\cdot a & d\cdot b & d\cdot c & \|d\|^2 \end{vmatrix}$, où a, b, c, d sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 [Corrigé]

On reprend l'exercice précédent en supposant que a, b, c, d sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Montrer que si a, b, c, d sont liés alors $D = 0$, et que dans le cas contraire $D > 0$.

Exercice 16 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & \ldots & n^2 \end{vmatrix}$

EXERCICE 17 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix}$

EXERCICE 18 [Corrigé]

Calculer $D(m,p) = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 & \dots & \mathrm{C}_m^p \\ \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}_{m+p}^0 & \mathrm{C}_{m+p}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+p}^p \end{vmatrix}$ (d'ordre $p+1$, avec $m \geq p$)

EXERCICE 19 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

EXERCICE 20 [Corrigé]

Soit a un réel. On note $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$ sous forme factorisée.
2. Déterminer le rang de la matrice A.
3. Résoudre le système $AX = B$.

EXERCICE 21 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

EXERCICE 22 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \dots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \dots & q & p+q \end{vmatrix}$ (d'ordre n)

EXERCICE 23 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Exercice 24 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 25 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$

Exercice 26 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$. Généraliser.

Exercice 27 [Corrigé]

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$

Exercice 28 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$

Exercice 29 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$

(Ajouter t à chaque coefficient. Considérer la fonction $D_n(t)$ ainsi obtenue et vérifier qu'elle est affine par rapport à t. Utiliser ensuite deux valeurs particulières de t)

Exercice 30 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$

Exercice 31 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} C_{n+1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_{n+2}^2 & C_{n+2}^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & C_{n+p-1}^1 & 1 \\ C_{n+p}^p & C_{n+p}^{p-1} & \dots & C_{n+p}^2 & C_{n+p}^1 \end{vmatrix}$

Exercice 32 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_p = \begin{vmatrix} C_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^2 & C_2^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & C_{p-1}^1 & 1 \\ C_p^p & C_p^{p-1} & \dots & C_p^2 & C_p^1 \end{vmatrix}$

Exercice 33 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1^2 - x & a_1a_2 & \dots & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 - x & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 - x & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} & a_n^2 - x \end{vmatrix}$

Exercice 34 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (d'ordre $n \geq 3$)

Exercice 35 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

Exercice 36 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix}$,

où P est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

EXERCICE 37 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

EXERCICE 38 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$

EXERCICE 39 [Corrigé]

Montrer qu'un déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

EXERCICE 40 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$

EXERCICE 41 [Corrigé]

Calculer le déterminant $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

EXERCICE 42 [Corrigé]

Calculer $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos 2\theta_0 & \dots & \cos n\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos n\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos n\theta_n \end{vmatrix}$ *(Indication : Van Der Monde)*

EXERCICE 43 [Corrigé]

Calculer le déterminant $\Delta_n(\theta)$ de $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ avec : $\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{i-1,j} = a_{i+1,j} = \cos\theta \\ a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$

Exercice 44 [Corrigé]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux étant nuls, et les autres valant ± 1.
On suppose que n est pair. Montrer que A est inversible.

Exercice 45 [Corrigé]

Soient A et B deux matrices de types respectifs (n, p) et (p, n), avec $n \neq p$.
Montrer que l'un au moins des déterminants $\det(AB)$ ou $\det(BA)$ est nul.

Exercice 46 [Corrigé]

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 47 [Corrigé]

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |\det(A + iB)|^2$.

Exercice 48 [Corrigé]

Soit A une matrice carrée d'ordre n, nilpotente. Montrer que $\det(\mathrm{I} + A) = 1$.

Exercice 49 [Corrigé]

Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre n.
Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de A et de B.

Exercice 50 [Corrigé]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Montrer que A^{-1} existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On retranche par exemple la colonne C_3 aux colonnes C_2 et C_4.

On peut alors développer par rapport à la ligne L_1 :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -c^2 & c^2 & b^2-c^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2-a^2 & a^2 & -a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c^2 & b^2-c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 \\ 1 & b^2-a^2 & -a^2 \end{vmatrix}$$

On soustrait maintenant L_2 à L_1 et L_2 :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2c^2 & b^2-a^2-c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 \\ 0 & b^2-a^2-c^2 & -2a^2 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (a^2+c^2-b^2)^2 - 4a^2c^2 \\ &= (a^2+2ac+c^2-b^2)(a^2-2ac+c^2-b^2) \\ &= ((a+c)^2-b^2)((a-c)^2-b^2) \\ &= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c) \end{aligned}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On ajoute toutes les lignes à la première et on factorise la somme (constante) obtenue.

Puis on effectue successivement $C_5 \leftarrow C_5 - C_4$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, puis on ajoute toutes les lignes à la première.

Dans le déterminant obtenu, on ajoute la première ligne à toutes les autres :

$$\Delta = 15 \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

On est arrivé à un déterminant triangulaire. Ainsi $\Delta = 15 \cdot 5^3 = 1875$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On additionne les colonnes C_1 et C_3 :

$$C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} 1+\cos 2\theta \\ \cos\theta + \cos 3\theta \\ \cos 2\theta + \cos 4\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta \\ 2\cos\theta\cos 2\theta \\ 2\cos\theta\cos 3\theta \end{pmatrix} = 2\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos 2\theta \\ \cos 3\theta \end{pmatrix} = (2\cos\theta)C_2$$

Ainsi les trois colonnes du déterminant Δ son liées. Il en découle $\Delta = 0$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Notons respectivement $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$.

Avec ces notations, on a $\Delta = \det(B+C, C+A, A+B)$ (dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.)

On développe en utilisant la trilinéarité, et le fait qu'un déterminant ayant deux colonnes égales est nul.

On obtient l'égalité : $\Delta = \det(B, C, A) + \det(C, A, B) = 2\det(A, B, C)$.

Mais $\det(A, B, C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

On reconnait un déterminant de Van Der Monde. Ainsi : $\Delta = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On ajoute toutes les lignes à la première puis on développe par rapport à L_1 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

Posons $\alpha = a+b+c+d$, $\beta = a+b-c-d$, $\gamma = a-b-c+d$ et $\delta = a-b+c-d$.

On constate qu'on a les égalités :

$$\Delta D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & -\gamma & -\delta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta D$$

Puisque $D \neq 0$, on en déduit la valeur du déterminant Δ :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

On constate que $\begin{pmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} = M\,{}^{\mathrm{T}}M$.

Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$ est $-2xyz$.

On en déduit que D est égal à $4x^2y^2z^2$.

Corrigé de l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Ecrivons D comme le déterminant d'une matrice M.

On constate que $M = JK$ avec $J = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$.

Mais $\det J = \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$ $\{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3\} \Rightarrow \det J = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$

On en déduit par "Sarrus" : $\det J = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

De plus J et K se déduisent l'une de l'autre en échangeant les indéterminées b et c.

Le résultat précédent étant symétrique par rapport à a, b et c, on en tire $\det J = \det K$.

Finalement $D = (\det J)^2 = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2$.

Corrigé de l'exercice 8 [Retour à l'énoncé]

On développe par rapport à la première colonne :

$$D = x \begin{vmatrix} x & y & z \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & w & -v \\ v & -u & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \end{vmatrix}$$

Chacun des déterminants 3×3 qui apparaissent ici se calcule aisément :
- Le premier vaut $uvy + uwz + u^2x = u(ux+vy+wz)$.
- Le second vaut $-v^2y - vwz - uvx = -v(ux+vy+wz)$.
- Le troisième vaut $uwx + vwy + w^2z = w(ux+vy+wz)$.

Donc $D = xu(ux+vy+wz) + yv(ux+vy+wz) + wz(ux+vy+wz) = (ux+vy+wz)^2$

Corrigé de l'exercice 9 [Retour à l'énoncé]

On a ajoute toutes les lignes à la première et on factorise la somme (constante) obtenue.

On effectue ensuite les opérations $\mathrm{C}_3 \leftarrow \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_2$ et $\mathrm{C}_4 \leftarrow \mathrm{C}_4 - \mathrm{C}_1$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & b-a \\ b & x & 0 & a-b \\ x & b & a-b & 0 \end{vmatrix}$$

On factorise par $(b-a)^2$, tout en développant par rapport à la troisième colonne :

$$D = (2x+a+b)(b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & x & 1 \\ b & x & -1 \end{vmatrix} = (2x+a+b)(b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x-a & 1 \\ b & x-b & -1 \end{vmatrix}$$

On trouve finalement : $D = (a+b+2x)(a+b-2x)(b-a)^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10 [Retour à l'énoncé]

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - x^3 L_1$.

On peut alors développer par rapport à la première colonne.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2-x^4 & x-x^5 & 1-x^6 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2-x^4 & x-x^5 & 1-x^6 \\ x & 2x^2 & 3x^3 \\ -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

On factorise x dans C_1 et C_2, puis $1-x^2$ dans la ligne L_1

$$D = x^2 \begin{vmatrix} x-x^3 & 1-x^4 & 1-x^6 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ -x & -2 & -3 \end{vmatrix} = x^2(1-x^2) \begin{vmatrix} x & 1+x^2 & 1+x^2+x^4 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ -x & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - xL_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + xL_2$.

On développe ensuite par rapport à la première colonne :

$$D = x^2(1-x^2) \begin{vmatrix} 0 & 1-x^2 & 1+x^2-2x^4 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2(x^2-1) & 3(x^4-1) \end{vmatrix} = x^2(x^2-1) \begin{vmatrix} 1-x^2 & 1+x^2-2x^4 \\ 2(x^2-1) & 3(x^4-1) \end{vmatrix}$$

On peut encore factoriser x^2-1 dans L_1 et L_2, avant de conclure par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$:

$$D = x^2(x^2-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1-2x^2 \\ 2 & 3(x^2+1) \end{vmatrix} = x^2(x^2-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1-2x^2 \\ 0 & -x^2+1 \end{vmatrix} = x^2(x^2-1)^4$$

Conclusion : $D = x^2(x^2-1)^4$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11 [Retour à l'énoncé]

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ et on factorise $x = a-b-c-d$ dans L_1.

On retranche alors C_1 à C_2, C_3, C_4, avant de développer par rapport à la première ligne :

$$D = x \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & -a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}$$

On ajoute L_1 à L_2 et à L_3, et on factorise $y = a+b+c-d$ et $z = a+b-c+d$:

$$D = -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ -a-b-c+d & -a-b-c+d & 0 \\ -a-b+c-d & 0 & -a-b+c-d \end{vmatrix} = -xyz \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On retranche enfin $C_2 + C_3$ à C_1, ce qui permet de conclure en notant $t = a-b+c+d$:

$$D = -xyz \begin{vmatrix} -a+b-c-d & d-b & c-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xyzt$$

Conclusion : $D = (a-b-c-d)(a-b+c+d)(a+b-c-d)(a+b+c-d)$.

Corrigé de l'exercice 12 [Retour à l'énoncé]

On note $s = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et on constate que :

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & t & -z \\ z & -t & x & y \\ t & z & -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

En prenant les déterminants, on trouve donc $\det^2 A = D^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^4$.

Or, relativement à la variable x, D est une fonction polynômiale de degré 4 dont le terme dominant est x^4 (obtenu par le produit des coefficients diagonaux.)

On en déduit que $D = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$.

Corrigé de l'exercice 13 [Retour à l'énoncé]

On pose $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$ $\Delta(x)$ est un déterminant de Van Der Monde, et c'est en même temps une fonction polynômiale de degré 4 en la variable x. Si on développe $\Delta(x)$ suivant L_5, on voit que D est l'opposé du coefficient de x^3 dans $\Delta(x)$.

Or $\Delta(x) = \lambda(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, avec $\lambda = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

On en déduit $\Delta(x) = \lambda(x^4 - (a+b+c+d)x^3 + \cdots)$ puis, en identiant les termes de degré 3 :

$D = \lambda(a+b+c+d) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

Corrigé de l'exercice 14 [Retour à l'énoncé]

Les quatre vecteurs a, b, c, d étant dans un espace de dimension 3, ils sont liés.

Ainsi il existe quatre scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non tous nuls, tels que : $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \overrightarrow{0}$. Notons $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ les quatre colonnes du déterminant D.

On constate que $\alpha \mathrm{C}_1 + \beta \mathrm{C}_2 + \gamma \mathrm{C}_3 + \delta \mathrm{C}_4 = \begin{pmatrix} a \cdot (\alpha a) \\ b \cdot (\alpha a) \\ c \cdot (\alpha a) \\ d \cdot (\alpha a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\beta b) \\ b \cdot (\beta b) \\ c \cdot (\beta b) \\ d \cdot (\beta b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\gamma c) \\ b \cdot (\gamma c) \\ c \cdot (\gamma c) \\ d \cdot (\gamma c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\delta d) \\ b \cdot (\delta d) \\ c \cdot (\delta d) \\ d \cdot (\delta d) \end{pmatrix}$.

Donc $\alpha \mathrm{C}_1 + \beta \mathrm{C}_2 + \gamma \mathrm{C}_3 + \delta \mathrm{C}_4 = \begin{pmatrix} a \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ b \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ c \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ d \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les quatre colonnes du déterminant D sont donc liées. On en déduit $D = 0$.

Corrigé de l'exercice 15 [Retour à l'énoncé]

Si a, b, c, d sont liés, on montre que D est nul comme dans l'exercice précédent.

On suppose donc que les vecteurs a, b, c, d sont libres.

Soit P la matrice de la famille des vecteurs a, b, c, d exprimés dans la base canonique.

Cette matrice est inversible (donc $\det P \neq 0$) car a, b, c, d sont libres.

Pour tous $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$, on a $(x \quad y \quad z \quad t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz' + tt' = u \cdot v.$

Cette remarque montre qu'on a l'égalité matricielle ${}^{\mathrm{T}}PP = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & a \cdot b & a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot a & \|b\|^2 & b \cdot c & b \cdot d \\ c \cdot a & c \cdot b & \|c\|^2 & c \cdot d \\ d \cdot a & d \cdot b & d \cdot c & \|d\|^2 \end{pmatrix}$

On en déduit $D = \begin{vmatrix} \|a\|^2 & a \cdot b & a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot a & \|b\|^2 & b \cdot c & b \cdot d \\ c \cdot a & c \cdot b & \|c\|^2 & c \cdot d \\ d \cdot a & d \cdot b & d \cdot c & \|d\|^2 \end{vmatrix} = \det({}^{\mathrm{T}}PP) = (\det P)^2 > 0.$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 16 [Retour à l'énoncé]

On constate que la ligne L_i s'écrit $n(i-1)(1, 1, \ldots, 1) + (1, 2, \ldots, n)$.

Ainsi $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$ sont dans le plan engendré par $U = (1, 1, \ldots, 1)$ et $V = (1, 2, \ldots, n)$.

On en déduit que D_n est nul dès que $n \geq 3$. Il reste $D_1 = |\,1\,| = 1$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 17 [Retour à l'énoncé]

Notons $\sigma = ab + bc + ca$.

On développe D par rapport à sa première ligne, en factorisant les différences de carrés :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2 \begin{vmatrix} (a+c)^2 & c^2 \\ c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ b^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & (a+c)^2 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2((\sigma + c^2)^2 - c^4) - a^2((\sigma - bc)^2 - (bc)^2) + b^2((ac)^2 - (\sigma - ac)^2) \\ &= \sigma((a+b)^2(\sigma + 2c^2) - a^2(\sigma - 2bc) - b^2(\sigma - 2ac)) \\ &= \sigma(2ab\sigma + 2c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b)) = 2\sigma(ab\sigma + c(a+b)\sigma) = 2\sigma^3 \end{aligned}$$

Conclusion : $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} = 2(ab + bc + ca)^3$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 18 [Retour à l'énoncé]

Numérotons les lignes de L_0 à L_p, et les colonnes de C_0 à C_p.

On effectue successivement, de $i = p$ à $i = 1$ (donc dans l'ordre décroissant des numéros de lignes) les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i-1}$.

Après ces opérations :

– Pour tout i de $\{1,\ldots,p\}$, $\mathrm{C}_{m+i}^{0} = \mathrm{C}_{m+i-1}^{0} = 1$.
  Le terme d'indice $(i,1)$ du nouveau déterminant est donc nul.

– Soient i et j deux indices quelconques de $\{1,\ldots,p\}$.
  Le terme d'indice (i,j) du nouveau déterminant est $\mathrm{C}_{m+i}^{j} - \mathrm{C}_{m+i-1}^{j} = \mathrm{C}_{m+i-1}^{j-1}$, c'est-à-dire le terme d'indice $(i-1,j-1)$ de l'ancien déterminant.

On en déduit qu'après ces opérations, et en développant suivant C_1 :

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{C}_m^1 & \mathrm{C}_m^2 & \cdots & \mathrm{C}_m^p \\ 0 & \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 & \cdots & \mathrm{C}_m^{p-1} \\ 0 & \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 & \cdots & \mathrm{C}_{m+1}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathrm{C}_{m+p-1}^0 & \mathrm{C}_{m+p-1}^1 & \cdots & \mathrm{C}_{m+p-1}^{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 & \cdots & \mathrm{C}_m^{p-1} \\ \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 & \cdots & \mathrm{C}_{m+1}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}_{m+p-1}^0 & \mathrm{C}_{m+p-1}^1 & \cdots & \mathrm{C}_{m+p-1}^{p-1} \end{vmatrix}$$

Autrement dit : $D_{m,p} = D_{m,p-1}$.

Par une récurrence évidente, il vient $D_{m,p} = D_{m,1} = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 \\ \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1$

Conclusion : pour tous indices m,p le déterminant $D_{m,p}$ est égal à 1.

Corrigé de l'exercice 19 [Retour à l'énoncé]

Posons $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x^2 \\ 9x^2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} x^4 \\ 5x^4 \\ 25x^4 \end{pmatrix}$.

L'idée est de chercher A_5 comme combinaison linéaire de A_1, A_2, A_3, A_4.

Compte tenu des degrés, on est amené à chercher des coefficients $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (ne dépendant pas de x) tels que $A_5 = \alpha x^4 A_1 + \beta x^3 A_2 + \gamma x^2 A_3 + \delta x A_4$.

Cela équivaut au système $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1 \\ \alpha+2\beta+3\gamma+4\delta = 5 \\ \alpha+4\beta+9\gamma+16\delta = 25 \end{cases}$ dont une solution est $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 2 \end{cases}$

On en déduit que $x^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2x^3 \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4 \\ 5x^4 \\ 25x^4 \end{pmatrix}$

On applique donc d'abord l'opération $\mathrm{C}_5 \leftarrow \mathrm{C}_5 - x^4\mathrm{C}_1 + 2x^3\mathrm{C}_2 - 2x\mathrm{C}_4$

De la même manière que précédemment, on peut exprimer A_4 en fonction de A_1, A_2, A_3.

On constate alors que $\begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3x^2 \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 3x \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x^2 \\ 9x^2 \end{pmatrix}$

On applique donc ensuite l'opération $\mathrm{C}_4 \leftarrow \mathrm{C}_4 - x^3\mathrm{C}_1 + 3x^2\mathrm{C}_2 - 3x\mathrm{C}_3$

Après ces deux opérations, $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 0 & 0 \\ 1 & y & y^2 & A & B \\ 1 & 2y & 3y^2 & C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 4x & 9x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$,

Avec :

– $A = y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 = (y-x)^3$.
– $B = y^4 - x^4 + 2x^3y - 2xy^3 = (x+y)(y-x)^3$.
– $C = 4y^3 - x^3 + 3x^2(6y) - 3x(3y^2) = 4y^3 - x^3 + 6x^2y - 9xy^2 = (4y-x)(y-x)^2$
– $D = 5y^4 - x^4 + 2x^3(2y) - 2x(4y^3) = 5y^4 - x^4 + 4x^3y - 8xy3^{=}(y-x)^2(5y^2+2xy-x^2)$

On en déduit :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (y-x)^5 \begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 4y-x & 5y^2+2xy-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)^5(y^2-xy) = y(y-x)^6$$

De même : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 4x & 9x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 3x & 8x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$

On trouve finalement $D = 2x^3y(y-x)^6$.

Corrigé de l'exercice 20 [Retour à l'énoncé]

1. On fait $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ puis on factorise $a^2+3a+2 = (a+1)(a+2)$ dans L_1.

   On effectue ensuite $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

   $$\det A = (a+1)(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a(a-1) & a(2-a) & 2(1-a) \\ 2 & 2(a-1) & a(a-2) & a(1-a) \\ 2a & 2(1-a) & a-2 & a(a-1) \end{vmatrix}$$

   On développe par rapport à L_1, tout en effectuant les factorisations suivant les colonnes :

   $$\det A = (a+1)(a+2)(a-1)^2(a-2) \begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 2 & a & -a \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

   Pour calculer le déterminant 3×3 final, on ajoute L_3 à L_2 et on développe suivant L_2.

   $$\begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 2 & a & -a \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & -2 \\ -2 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-2)(a+2)$$

   On en déduit finalement : $\det A = (a+1)^2(a+2)^2(a-1)^2(a-2)^2$.

2. – Si $a \notin \{-2,-1,1,2\}$, $\det A$ est non nul : la matrice A est alors de rang 4.
   – Si $a = 1$, alors $L_2 = L_1$ et $L_4 = L_1$: la matrice A est de rang 2.
   – Si $a = -1$, alors $L_2 = -L_1$ et $L_4 = -L_1$: la matrice A est de rang 2.
   – Si $a = 2$, $L_4 = L_1$ et $L_3 = L_2$, donc $\operatorname{rg} A = 2$.
   – Si $a = -2$, $L_4 = -L_1$ et $L_3 = -L_2$, donc $\operatorname{rg} A = 2$.

3. La troisième colonne de A est égale à la colonne B des seconds membres.

   Il s'ensuit que que $X = (0,0,1,0)$ est une solution de $AX = B$.
   – Si a n'appartient pas à $\{-2,-1,1,2\}$, le système $AX = B$ est “de Cramer” et on vient donc de trouver son unique solution.

– Dans les quatre cas particuliers, le système n'est pas de Cramer mais on sait maintenant qu'il a au moins une solution.
  Il en admet donc une infinité, obtenues en résolvant le sous-système des deux premières équations (car $\mathrm{L}_3, \mathrm{L}_4$ sont combinaisons linéaires de $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$.)
– Supposons par exemple $a = 1$ (les trois autres cas se traitent de manière analogue.)
  Le système $AX = B$ s'écrit $\begin{cases} x+y+2z+2t=2 \\ x+y+2z+2t=2 \\ 2x+2y+z+t=1 \\ 2x+2y+z+t=1 \end{cases}$.
  Il se réduit à $\begin{cases} x+y+2z+2t=2 \\ 2x+2y+z+t=1 \end{cases}$ et équivaut à $\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=1 \end{cases}$
  La solution générale est alors le plan affine défini par :
  $(x, y, z, t) = (x, -x, 1-t, t) = (0, 0, 1, 0) + x(1, -1, 0, 0) - t(0, 0, 1, -1)$
  On reconnait la solution particulière $(0, 0, 1, 0)$ et on voit apparaître une base de $\ker A$, formée des vecteurs $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 21 [Retour à l'énoncé]

On retranche C_4 à C_1, puis C_3 à C_4, puis C_2 à C_3 et enfin C_1 à C_2.

Dans le résultat, on effectue l'opération $\mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$ puis on développe par rapport à la dernière colonne :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 19 & 8 & 6 \\ 5 & 11 & 3 & 36 & 6 \\ 10 & 20 & -13 & 6 & 39 \\ 10 & 24 & 21 & 12 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 19 & 8 & 6 \\ 5 & 11 & 3 & 36 & 6 \\ 10 & 20 & -13 & 6 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 \\ 5 & 13 & 19 & 8 \\ 5 & 11 & 3 & 36 \\ 10 & 20 & -13 & 6 \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1$, et $\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 2\mathrm{L}_1$, puis on développe par rapport à la premère colonne.

On termine par l'opération $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1$.

$$D = 5 \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & -2 & -17 & -2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \\ -2 & -17 & -2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 100$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 22 [Retour à l'énoncé]

De $j = n$ à $j = 2$ (dans l'ordre décroissant des numéros de colonne) on soustrait C_{j-1} à C_j.

De $i = n$ à $i = 2$ (dans l'ordre décroissant des numéros de ligne) on soustrait alors L_{i-1} à L_j.

On obtient ainsi une nouvelle expression de D_n.

On développe cette nouvelle expression de D_n par rapport à sa dernière ligne :

$$D_n = \begin{vmatrix} p+q & -q & 0 & \dots & 0 \\ q & p & -q & \ddots & \vdots \\ q & 0 & p & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -q \\ q & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} q(-q)^{n-1} + pD_{n-1} = q^n + pD_{n-1}$$

On en déduit, par une récurrence évidente (en terminant par $D_1 = q + p$) :

$$\begin{aligned} D_n &= q^n + p(q^{n-1} + pD_{n-2}) = q^n + pq^{n-1} + p^2 D_{n-2} \\ &= q^n + pq^{n-1} + \cdots + p^k q^{n-k} + \cdots + p^{n-1} D_1 = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

– Si $p = q$, ce résultat se simplifie en $D_n = (n+1)p^n$.

– Si $p \neq q$, on peut écrire $D_n = \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 23 [Retour à l'énoncé]

Notons $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

On constate que $D_n = \det(a_1 e_1 + b, a_2 e_2 + b, \ldots, a_n e_n + b)$.

Si on développe ce déterminant en utilisant la n-linéarité, tous les déterminants où apparaissent au moins deux fois le vecteur b sont nuls.

Ce développement se réduit donc à :

$$\begin{aligned} D_n &= \det(a_1 e_1, a_2 e_2, \ldots, a_n e_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(a_1 e_1, \ldots, a_{j-1} e_{j-1}, b, a_{j+1} e_{j+1}, \ldots, a_n e_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i \neq j} a_i\Big) \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, b, e_{j+1}, \ldots, e_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i \neq j} a_i\Big) \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, b_j e_j, e_{j+1}, \ldots, e_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(\prod_{i \neq j} a_i\Big) \end{aligned}$$

Pour prendre un exemple, si $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$, on trouve :

$$D_n = n!\Big(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{j}\Big) = n!\Big(1 + b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n}\Big)$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 24 [Retour à l'énoncé]

Pour i allant de 2 à $n+1$ (dans cet ordre), on effectue $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \mathrm{C}_{i-1}$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire. Donc $D_{n+1} = (-1)^n (n+1) \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Autre méthode : on ajoute toutes les colonnes à la première et on développe ensuite par rapport à l'unique coefficient non nul de C_1 (on tombe alors sur un déterminant triangulaire.)

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 25 [Retour à l'énoncé]

On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ puis on factorise $x + s = x + a_1 + \cdots + a_n$ dans C_1.
On retranche ensuite $a_1 C_1$ à C_2, $a_2 C_1$ à C_2, ..., $a_n C_1$ à C_{n+1} :

$$D = (x+s) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ 1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix} = (x+s) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_{n-1} & x - a_n \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire. Conclusion : $D_{n+1}(x) = \left(x + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$

Corrigé de l'exercice 26 [Retour à l'énoncé]

On développe D_6 par rapport à L_1, puis les deux déterminants obtenus par rapport à L_5 :

$$D_6 = a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Autrement dit $D_6 = (a^2 - b^2)D_4$.
De la même manière que précédemment :

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)D_2$$

Puisque $D_2 = a^2 - b^2$, on trouve $D_6 = (a^2 - b^2)^3$.
La généralisation est facile car la même méthode donne $D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)}$.
On en déduit, pour tout $n \geq 1$, $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.
On peut également considérer des déterminants d'ordre impair.

Par exemple $D_5 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)D_4 = (a+b)(a^2 - b^2)^2$.

Plus généralement, et pour tout entier n : $D_{2n+1} = (a+b)D_{2n} = (a+b)(a^2 - b^2)^n$.

Corrigé de l'exercice 27 [Retour à l'énoncé]

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \cdots + L_n$, puis on factorise $x + (n-1)a$ dans L_1.

Ensuite on retranche aL_1 à toutes les autres lignes :

$$D_n = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & x & a & \ldots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a \\ a & \ldots & \ldots & a & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire.

Conclusion : $D_n = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Corrigé de l'exercice 28 [Retour à l'énoncé]

Notons $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

D_n s'écrit $D_n = \det_{(e)}((x_1-a)e_1 + au, (x_2-a)e_2 + au, \ldots, (x_n-a)e_n + au)$.

Avec la n-linéarité, le développement de D_n se réduit à la somme suivante (tous les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à au) :

$$\begin{aligned} D_n &= \det((x_1-a)e_1, \ldots, (x_n-a)e_n) \\ &\quad + a\sum_{j=1}^{n} \det((x_1-a)e_1, \ldots, (x_{j-1}-a)e_{j-1}, u, (x_{j+1}-a)e_{j+1}, \ldots, (x_n-a)e_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(x_k-a) + a\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x_k-a)\det(e_1, \ldots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

Mais $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i \Rightarrow \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \ldots, e_n) = \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_n) = 1$.

Ainsi $D_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k-a) + a\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x_k-a)$.

Si on note $P_n(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k-t)$, alors $P_n'(t) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x_k-t)$.

On en déduit une expression plus simple du résultat : $D_n = P_n(a) - aP_n'(a)$.

Remarque : si tous les x_k sont égaux à x, on a $P_n(t) = (x-t)^n$ et $P_n'(t) = -n(x-t)^{n-1}$.

On en déduit $D_n = P_n(a) - aP_n'(a) = (x-a)^n + an(x-a)^{n-1} = (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$ et on retrouve ainsi le résultat de l'exercice précédent.

Corrigé de l'exercice 29 [Retour à l'énoncé]

- On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs-colonnes de D_n. On note $U = (1, 1, \ldots, 1)$.
  Avec ces notations et l'indication de l'énoncé : $\Delta_n(t) = \det(C_1 + tU, C_2 + tU, \ldots, C_n + tU)$.

Avec la n-linéarité, le développement de $\Delta_n(t)$ se réduit à la somme suivante (les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à tU) :

$$\Delta_n(t) = \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n) + t\sum_{j=1}^{n} \det(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, U, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)$$

$\Delta_n(t)$ est donc bien une fonction affine $\alpha + \beta t$ de la variable t, dans laquelle le terme constant α représente la valeur du déterminant initial D_n. Ainsi $D_n = \Delta_n(0)$.

– On pose $t = -a$:

  $\Delta_n(t)$ est triangulaire inférieur, et $\Delta_n(-a) = D_n - a\beta = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k - a)$.

– On pose $t = -b$:

  Alors $\Delta_n(-b) = D_n - b\beta = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k - b)$ (déterminant triangulaire supérieur.)

Puisque $a \neq b$, on en déduit :

$$D_n = \frac{b\Delta_n(-a) - a\Delta_n(-b)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\Big(b\prod_{k=1}^{n}(x_k - a) - a\prod_{k=1}^{n}(x_k - b)\Big)$$

– On va maintenant retrouver le résultat de l'exercice 25 (même énoncé, mais avec $a = b$.)

  En effet, D_n est une fonction polynômiale par rapport à a et b.

  En particulier, la valeur de D_n pour $b = a$ s'obtient par passage à la limite quand $b \to a$.

  Si on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k - a)$, on a $D_n = \dfrac{bP_n(a) - aP_n(b)}{b-a} = P_n(a) - a\dfrac{P_n(b) - P_n(a)}{b-a}$.

  Si on fait tendre b vers a, alors $\dfrac{P_n(b) - P_n(a)}{b-a}$ tend vers $P_n'(a)$.

  La valeur de D_n quand $b = a$ est donc $P_n(a) - aP_n'(a)$: c'est le résultat de l'exercice 28.

Corrigé de l'exercice 30 [Retour à l'énoncé]

On effectue successivement les opérations $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \mathrm{C}_{j-1}$, de $j = n$ à $j = 2$ (donc dans l'ordre décroissant des numéros de colonne). On obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & \ldots & b_n - b_{n-1} & a_n - b_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(a_j - b_j)$$

Corrigé de l'exercice 31 [Retour à l'énoncé]

1. Remarque : Si $n = 0$, on retrouve le déterminant $D_p = 1$ de l'exercice précédent. On peut donc supposer $n \geq 1$. On considère un indice i compris entre 1 et $p - 1$.
   On peut représenter ainsi les lignes L_i et L_{i+1} de D_p^n :

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc} \mathrm{L}_i & \mathrm{C}_{n+i}^{i} & \mathrm{C}_{n+i}^{i-1} & \ldots & \mathrm{C}_{n+i}^{j} & \ldots & \mathrm{C}_{n+i}^{1} & \mathrm{C}_{n+i}^{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{i+1} & \mathrm{C}_{n+i+1}^{i+1} & \mathrm{C}_{n+i+1}^{i} & \ldots & \mathrm{C}_{n+i+1}^{j+1} & \ldots & \mathrm{C}_{n+i+1}^{2} & \mathrm{C}_{n+i+1}^{1} & \mathrm{C}_{n+i+1}^{0} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

Compte tenu des égalités $\mathrm{C}_{n+i+1}^{j+1} - \mathrm{C}_{n+i}^{j} = \mathrm{C}_{n+i}^{j+1}$, la ligne $\mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$ s'écrit :

$$\left(\mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i \,\middle|\, \mathrm{C}_{n+i}^{i+1} \quad \mathrm{C}_{n+i}^{i} \quad \ldots \quad \mathrm{C}_{n+i}^{j+1} \quad \ldots \quad \mathrm{C}_{n+i}^{2} \quad \mathrm{C}_{n+i}^{1} \quad \mathrm{C}_{n+i}^{0} \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right)$$

On reconnait la ligne d'indice $i+1$ du déterminant D_p^{n-1}.

Si on effectue successivement les opérations $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$ (selon les indices décroissants) on transforme donc D_p^n en un déterminant ayant les mêmes lignes d'indice 2 à p que le déterminant D_p^{n-1}.

La seule différence se situe au niveau des lignes L_1. Or la première ligne $(n+1, 1, 0, \ldots)$ de D_p^n est la somme de la première ligne $(n, 1, 0, \ldots, 0)$ de D_p^{n-1} et de la ligne $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.

On décompose ainsi L_1 puis on utilise la linéarité par rapport à cette ligne.

Il apparait deux déterminants d'ordre p :
– Le premier est D_p^{n-1}
– Le second peut être développé par rapport à première ligne $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.
  Il apparait alors le déterminant D_{p-1}^n.

On en déduit la relation $D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n$.

2. Cette relation permet d'envisager une récurrence sur la valeur s de la somme $n+p$.

   La formule $D_p^n = \mathrm{C}_{n+p-1}^{n}$ est vraie si $s = 1$, car la seule possibilité est alors $p = 1, n = 0$ et on a bien $D_1^0 = |\,\mathrm{C}_1^1\,| = 1$.

   Supposons la formule $D_q^m = \mathrm{C}_{m+q-1}^{m}$ vraie pour les couples (q, m) tels que $q + m = s - 1$.

   Soit alors un couple (p, n) tel que $p + n = s$.

   Alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux couples $(p, n-1)$ et $(p-1, n)$:

$$D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n = \mathrm{C}_{n+p-2}^{n-1} + \mathrm{C}_{n+p-2}^{n} = \mathrm{C}_{n+p-1}^{n}$$

   ce qui démontre la formule au rang s.

   Conclusion : pour tout couple (p, n), avec $p \geq 1$ et $n \geq 0$, on a : $D_p^n = \mathrm{C}_{n+p-1}^{n}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 32 [Retour à l'énoncé]

On considère un indice i compris entre 1 et $p-1$.

On peut représenter ainsi les lignes L_i et L_{i+1} de D_p :

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc} \mathrm{L}_i & \mathrm{C}_i^i & \mathrm{C}_i^{i-1} & \ldots & \mathrm{C}_i^j & \ldots & \mathrm{C}_i^1 & \mathrm{C}_i^0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{i+1} & \mathrm{C}_{i+1}^{i+1} & \mathrm{C}_{i+1}^{i} & \ldots & \mathrm{C}_{i+1}^{j+1} & \ldots & \mathrm{C}_{i+1}^{2} & \mathrm{C}_{i+1}^{1} & \mathrm{C}_{i+1}^{0} & 0 \ldots & 0 \end{array} \right)$$

Compte tenu des égalités $\mathrm{C}_{i+1}^{j+1} - \mathrm{C}_i^j = \mathrm{C}_i^{j+1}$, la ligne $\mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i$ s'écrit :

$$\left(\mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i \,\middle|\, 0 \quad \mathrm{C}_i^i \quad \ldots \quad \mathrm{C}_i^{j+1} \quad \ldots \quad \mathrm{C}_i^2 \quad \mathrm{C}_i^1 \quad \mathrm{C}_i^0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \right)$$

On effectue alors successivement $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p-1$ à $i = 1$ selon les indices décroissants de ligne. On obtient un déterminant que l'on peut développer par rapport à sa première colonne. On reconnait alors D_{p-1} :

$$D_p = \begin{vmatrix} C_1^1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_1^1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & C_2^2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \dots & C_{p-2}^1 & 1 \\ 0 & C_{p-1}^{p-1} & C_{p-1}^{p-2} & \dots & C_{p-1}^2 & C_{p-1}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ C_2^2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & C_{p-2}^1 & 1 \\ C_{p-1}^{p-1} & C_{p-1}^{p-2} & \dots & C_{p-1}^2 & C_{p-1}^1 \end{vmatrix}$$

Autrement dit $D_p = D_{p-1}$.
Par une récurrence évidente, on trouve alors $D_p = D_1 = 1$.

Corrigé de l'exercice 33 [Retour à l'énoncé]

On note $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Soit $(e) = e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Alors $D_n(x)$ est le déterminant dans (e) de la famille des vecteurs $v_j = a_j u - x e_j$.

On développe $D_n(x) = \det(a_1 u - x e_1, \dots, a_j u - x e_j, \dots, a_n u - x e_n)$ en utilisant le caractère n-linéaire alterné des applications déterminants.

Dans chaque composante $a_j u - x e_j$, on "choisit" donc soit $a_j u$ soit $x e_j$.

Mais on choisit $a_j u$ qu'une fois au plus, sans quoi le déterminant obtenu est nul.

Ainsi $D_n(x) = \det(-xe_1, \dots, -xe_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(-xe_1, \dots, -xe_{j-1}, a_j u, -xe_{j+1}, \dots, -xe_n)$.

Le premier déterminant vaut $(-x)^n \det(e_1, \dots, e_n) = (-x)^n$.

Celui qui figure dans la somme vaut $(-x)^{n-1} a_j \det\Big(e_1, \dots, e_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_{j+1}, \dots, e_n\Big)$.

Là encore, les propriétés des déterminants font que cette expression se réduit à $(-x)^{n-1} a_j^2$.

Conclusion : $D_n(x) = (-x)^n + (-x)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = (-x)^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - x\Big)$.

Corrigé de l'exercice 34 [Retour à l'énoncé]

Le résultat est immédiat en développant par rapport à la première colonne, car on aboutit à deux déterminants triangulaires d'ordre $n-1$. Plus précisément :

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} + (-1)^{n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1}$$

Donc $D = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Corrigé de l'exercice 35 [Retour à l'énoncé]

On retranche la dernière colonne à toutes les autres. Le déterminant obtenu est triangulaire :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 & n & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & n & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 0 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

Corrigé de l'exercice 36 [Retour à l'énoncé]

Soit m un entier naturel tel que $\deg P \le m < n$ (par exemple $m = \deg P$ si $P \neq 0$.)

Les polynômes $x \mapsto P(x), x \mapsto P(x+1), \ldots, x \mapsto P(x+n)$ sont de même degré que P.

Il sont dans $\mathbb{R}_m[X]$, qui est de dimension $m+1 \le n$.

On en déduit que ces $n+1$ polynômes sont liés.

Il existe donc $n+1$ scalaires non tous nuls tels que $\forall x \in \mathbb{K}, \ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x+j) = 0$.

Mais cette égalité permet aussi d'écrire : $\forall x \in \mathbb{K}, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x+i+j) = 0$.

Si on note $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ les $n+1$ colonnes de D, on a donc : $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \mathrm{C}_j = 0$.

Ainsi les colonnes de D sont liées. Il en découle $D = 0$.

Corrigé de l'exercice 37 [Retour à l'énoncé]

On additionne toutes les lignes à la première, et on factorise la somme constante $\frac{n(n+1)}{2}$.
On retranche ensuite C_2 à C_1, puis C_3 à C_2, ..., et enfin C_n à C_{n-1}.

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & 2 & 1 & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n & n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne.

Dans le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu, on ajoute toutes les lignes à la première.

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-n & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On ajoute enfin la première ligne à toutes les autres.
Le déterminant obtenu est triangulaire :

$$D = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ 0 & -n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -n & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0-n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}n^{n-2} = \frac{n+1}{2}(-n)^{n-1}$$

Corrigé de l'exercice 38 [Retour à l'énoncé]

On ajoute la ligne L_1 à toutes les autres lignes :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \ldots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

Corrigé de l'exercice 39 [Retour à l'énoncé]

Pour toute matrice carrée A, on a $\det A = \det({}^{\mathrm{T}}A)$.
Si A est antisymétrique d'ordre n, cela devient $\det A = \det(-A) = (-1)^n \det A$.
En particulier, si n est impair, on trouve $\det A = -\det A$, c'est-à-dire $\det A = 0$.

Corrigé de l'exercice 40 [Retour à l'énoncé]

On factorise j dans C_j, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.

On en déduit alors l'égalité $D_n = n!\Delta_n$, avec $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

- Si n est impair :
  Dans ce cas Δ_n est un déterminant antisymétrique d'ordre impair.
  On en déduit $\Delta_n = 0$ donc $D_n = 0$ (voir exercice précédent.)
- Si n est pair :
  On ajoute la dernière ligne à la première, et la première colonne à la dernière :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

  On développe par rapport à la première ligne, puis par rapport à la dernière colonne.
  On constate alors que $\Delta_n = \Delta_{n-2}$. Ainsi $\Delta_n = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.
- Conclusion : si n est impair, $D_n = 0$. Si n est pair, $D_n = n!$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 41 [Retour à l'énoncé]

On retranche C_{n-1} à C_n, puis C_{n-2} à C_{n-1}, ..., et enfin C_1 à C_2.

On ajoute ensuite la dernière ligne à toutes les autres.

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ n & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n+1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & -2 & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & -2 & \dots & -2 & 0 \\ n & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On en déduit $D_{n+1} = n(-1)^n 2^{n-1}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 42 [Retour à l'énoncé]

Pour tout m de $\mathbb{N}^*$ et tout θ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos m\theta &= \operatorname{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \sum_{k=0}^{m/2} \mathrm{C}_m^{2k} \cos^{m-2k}\theta\,(-1)^k \sin^{2k}\theta \\ &= \sum_{k=0}^{m/2} \mathrm{C}_m^{2k} \cos^{m-2k}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^k \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un polynôme P_m, de degré m, tel que $\cos m\theta = P_m(\cos\theta)$.

Le coefficient dominant du polynôme P_m est $\sum\limits_{k=0}^{m/2} \mathrm{C}_m^{2k} = 2^{m-1}$.

Ainsi on peut écrire $\cos m\theta = 2^{m-1}(\cos\theta)^m + Q_m(\cos\theta)$, avec $\deg Q_m \le m-1$.

Notons $C_0, C_1, \dots, C_n$ les colonnes successives du déterminant D_{n+1}.

Ainsi, pour tout m de $\{0,\dots,n\}$, $C_m = \begin{pmatrix} \cos m\theta_0 \\ \cos m\theta_1 \\ \vdots \\ \cos m\theta_n \end{pmatrix}$. De même, notons $C'_m = \begin{pmatrix} \cos^m\theta_0 \\ \cos^m\theta_1 \\ \vdots \\ \cos^m\theta_n \end{pmatrix}$.

On note que $C_0 = C'_0$, que $C_1 = C'_1$ et $C_2 = 2C'_2 + C'_0$ (car $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta + 1$.)

Plus généralement, ce qui précède montre que C_m s'écrit $C_m = 2^{m-1}C'_m + C''_m$, où C''_m est une combinaison linéaire des colonnes C'_j, avec $j < m$.

Ainsi, en utilisant la n-linéarité et le fait qu'on ne modifie pas la valeur d'un déterminant en retranchant d'une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \det(C_0, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots, C_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2 + C''_2, 2^2C'_3 + C''_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3 + C''_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \dots \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m, \dots, 2^{n-1}C'_n) \end{aligned}$$

Ainsi $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \det(C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_m, \ldots, C'_n)$.
Mais $\Delta_{n+1} = \det(C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \ldots, C'_m, \ldots, C'_n)$ est un déterminant de Van Der Monde.
La valeur de Δ_{n+1} est $\prod\limits_{0\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$.

On en déduit : $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod\limits_{0\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 43 [Retour à l'énoncé]

On développe $\Delta_n(\theta)$ par rapport à sa première ligne $L_1 = (2, \cos\theta, 0, \ldots, 0)$.
On en déduit $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos\theta\, D_{n-1}(\theta)$,
où $D_{n-1}(\theta)$ est un déterminant d'ordre $n-1$.
On développe $D_{n-1}(\theta)$ par rapport à sa première colonne $C_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.
On constate que $D_{n-1}(\theta) = \cos\theta\,\Delta_{n-2}(\theta)$.
Finalement, on a la relation $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2\theta\Delta_{n-2}(\theta)$, pour tout $n \ge 3$.
On reconnait une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $t^2 - 2t + \cos^2\theta = 0$.
Le discriminant (réduit) de cette équation est $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.

– Dans un premier temps, on suppose $\sin\theta \ne 0$.

  L'équation caractéristique possède alors les deux solutions distinctes $\begin{cases} t_1 = 1 + \sin\theta \\ t_2 = 1 - \sin\theta \end{cases}$.

  Il existe donc (α, β) dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, n \ge 1,\ \Delta_n(\theta) = \alpha(1+\sin\theta)^n + \beta(1-\sin\theta)^n$$

  On a $\Delta_1(\theta) = 2$ et $\Delta_2(\theta) = \begin{vmatrix} 2 & \cos\theta \\ \cos\theta & 2 \end{vmatrix} = 4 - \cos^2\theta$.

  On complète la relation $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2\theta\Delta_{n-2}(\theta)$ pour $n = 2$ en posant $\Delta_0(\theta) = 1$.

  Les valeurs $\begin{cases} \Delta_0(\theta) = 1 \\ \Delta_1(\theta) = 2 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha(1+\sin\theta) + \beta(1-\sin\theta) = 2 \end{cases}$

  On en déduit : $\alpha = \dfrac{1+\sin\theta}{2\sin\theta}$ et $\beta = \dfrac{\sin\theta - 1}{2\sin\theta}$.

  Finalement, on trouve (et avec la condition $\sin\theta \ne 0$) :

$$\forall\, n \ge 1,\ \Delta_n(\theta) = \frac{(1+\sin\theta)^{n+1} - (1-\sin\theta)^{n+1}}{2\sin\theta}$$

– On suppose maintenant $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = k\pi$, donc $\cos\theta = (-1)^k$.

  Il est clair que $\Delta_n(\theta)$ est une fonction continue par rapport à θ (en effet un déterminant est une fonction polynômiale donc continue de ses coefficients.)

  Pour $\sin\theta \ne 0$, on sait que $\Delta_n(\theta) = \varphi(\sin\theta)$, avec $\varphi(x) = \dfrac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{2x}$.

  Au voisinage de 0, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}(1 + (n+1)x + \mathrm{o}(x) - 1 + (n+1)x + \mathrm{o}(x)) = n + 1 + \mathrm{o}(1)$$

  Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = n+1$.

  On en déduit, pour tout k de $\mathbb{Z}$: $\Delta_n(k\pi) = n+1$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 44 [Retour à l'énoncé]

Puisque A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\det A$ est un entier relatif.

On va prouver que $\det A$ est impair, ce qui assurera $\det A \neq 0$ donc A inversible.

Soit $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ le développement de $\det A$ par rapport à la ligne L_i.

Chaque cofacteur A_{ij} est un entier relatif.

Pour chaque coefficient non diagonal a_{ij}, les entiers A_{ij} et $a_{ij}A_{ij}$ ont même parité.

On peut donc remplacer les coefficients non diagonaux de $\det A$ par 1 sans changer sa parité.

Ainsi $\det A$ a la même parité que le déterminant Δ_n de terme général $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

Pour calculer Δ_n, on ajoute toutes les lignes à la première et on factorise $n-1$.

On retranche alors la première colonne de toutes les autres :

$$\Delta_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

Puisque n est impair, on voir que Δ_n donc $\det A$ sont impairs.

Ainsi $\det A \neq 0$: la matrice A est donc inversible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 45 [Retour à l'énoncé]

Il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, de matrice A dans les bases canoniques.

Il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, de matrice B dans les bases canoniques.

Ainsi $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique que $\mathbb{K}^n$.

De même $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Par l'absurde, supposons $\det(AB) \neq 0$ et $\det(BA) \neq 0$.

Il en découle que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des isomorphismes.

L'injectivité de $g \circ f$ implique celle de f, et la surjectivité de $f \circ g$ implique celle de f.

Ainsi $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme : c'est absurde car les dimensions n, p sont distinctes.

Conclusion : l'une au moins de deux matrices AB et BA a un déterminant nul.

Remarque : On peut faire un raisonnement direct et supposer $n < p$ par exemple.

Alors il est certain que la matrice BA (qui est d'ordre p) n'est pas inversible.

Elle a en effet même rang que $g \circ f$. Or $\dim \mathrm{Im}\,(g \circ f) = \dim g(\mathrm{Im}\, f) \leq \dim \mathrm{Im}\, f \leq n < p$.

La matrice BA, d'ordre p et de rang $n < p$, est donc non inversible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 46 [Retour à l'énoncé]

Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on ajoute C_{n+j} à C_j. On obtient $D_{2n} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Pour i allant de 1 à n, on ajoute alors L_{n+i} à L_i. On obtient alors $D_{2n} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$.

Le déterminant obtenu est triangulaire à diagonale unité. Donc $D_{2n} = 1$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 47 [Retour à l'énoncé]

Pour k dans $\{1,\ldots,n\}$, on effectue $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k + i\mathrm{C}_{n+k}$. On en déduit $D_{2n} = \begin{vmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{vmatrix}$.

Pour tout indice de ligne k compris entre 1 et n, on effectue alors $\mathrm{L}_{n+k} \leftarrow \mathrm{L}_{n+k} - i\mathrm{L}_k$.

On en déduit $D_{2n} = \begin{vmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$.

Mais les coefficients des matrices $A+iB$ et $A-iB$ sont conjugués deux à deux.

Il en est donc de même de leurs déterminants. On en déduit : $D_{2n} = |\det(A+iB)|^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 48 [Retour à l'énoncé]

On sait qu'il existe P inversible telle que $T = P^{-1}AP$ soit strictement triangulaire supérieure.

On a alors $A + I = PTP^{-1} + I = P(T+I)P^{-1}$ et donc $\det A = \det(T+I)$.

Or $I+T$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

Le déterminant de $I+T$, et donc celui de A, sont donc égaux à 1.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 49 [Retour à l'énoncé]

Pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, on échange L_i et L_{n+i}. On trouve : $D_{2n} = (-1)^n \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$.

Ce dernier déterminant, triangulaire supérieur par blocs, vaut $\det A \det B$.

Conclusion : $D_{2n} = (-1)^n \det A \det B$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 50 [Retour à l'énoncé]

– Supposons que A soit inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et soit B son inverse.
  Alors $AB = \mathrm{I}_n \Rightarrow \det A \det B = 1$.
  Or $\det A$ et $\det B$ sont dans $\mathbb{Z}$. Donc $\det A = \pm 1$
– Réciproquement supposons $\det A = \varepsilon = \pm 1$.
  Alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\,A = \pm\,{}^{\mathrm{T}}\mathrm{Com}\,A$.
  Mais $\mathrm{Com}\,A$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
  On en déduit que A est inversible dans $\mathbb{Z}$.